

MAT1120: Kalkulus og lineær algebra

Avhandling: Matematiske perspektiver på digitale læringslokasjoner

Ole Kristian Aamot
Universitetet i Oslo

25. august 2025

Innhold

1	Innledning	1
1.1	Datasettet	2
2	Matematiske representasjoner	2
2.1	Vektorer	2
2.2	Avstand i planet	2
2.3	Haversine: stor sirkel-avstand på jordkula	2
2.4	Matriser og transformasjoner	3
2.5	Funksjoner av flere variable	4
3	Anvendelser i MAT1120	4
4	Uløselighetsteoremet (Abels uløselighetsteorem)	5
5	Diskusjon	5
6	Konklusjon	5

Sammendrag

Denne avhandlingen undersøker hvordan matematiske begreper fra MAT1120 – særlig kalkulus og lineær algebra – kan anvendes på digitale læringsressurser representert gjennom en JSON-lignende datastruktur. Datastrukturen inneholder metadata om ressurser knyttet til Universitetet i Oslo (UiO), MIT og Stanford. Ved å benytte vektorrepresentasjoner, matriser, distanseberegninger (inkludert stor sirkel-avstand via haversine), og funksjoner av flere variable, konkretiseres teorier fra MAT1120 i en digital og geografisk kontekst. I tillegg presenteres Abels uløselighetsteorem som et eksempel på et grunnleggende uløselighetsresultat i algebra, med refleksjon rundt når lukkede former ikke finnes og hvorfor numeriske metoder blir nødvendige.

1 Innledning

Avstand til læringsressurser har historisk vært et praktisk hinder som tradisjonelt ble møtt med fysiske biblioteker og campus. Med internett kan en i prinsippet nå “reise” til biblioteket uten vesentlig energitap. Dette reiser nye, konkrete problemstillinger hvor matematiske verktøy fra kalkulus og lineær algebra gir rammeverk for modellering, måling og optimalisering: Hvordan representere digitale og geografiske læringsknutepunkt? Hvordan måle avstand og nærhet i

både geometri og funksjonsrom? Når er lukkede analytiske uttrykk tilgjengelige, og når må vi ty til numerikk?

1.1 Datasettet

Vi modellerer tre læringslokasjoner med geokoordinater (breddegrad, lengdegrad):

```
{id: "11898951", name: "Universitetet i Oslo",  
  location: "https://www.uio.no/",  
  glat: 59.91270000, glon: 10.74610000},  
{id: "11898938", name: "MITx",  
  location: "https://mitxonline.mit.edu/",  
  glat: 42.362114, glon: -71.0889444},  
{id: "11898998", name: "Stanford",  
  location: "https://mystanfordconnection.stanford.edu/",  
  glat: 37.40857780, glon: -122.18218310}
```

Formelt identifiserer vi datasettet med en endelig delmengde $L \subset \mathbb{R}^2$,

$$L = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^3 = \{(59.9127, 10.7461), (42.362114, -71.0889444), (37.4085778, -122.1821831)\}.$$

2 Matematiske representasjoner

2.1 Vektorer

Hver lokasjon representeres som en vektor $\vec{v}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. For eksempel

$$\vec{v}_{\text{UiO}} = \begin{bmatrix} 59.9127 \\ 10.7461 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\text{MIT}} = \begin{bmatrix} 42.362114 \\ -71.0889444 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_{\text{Stanford}} = \begin{bmatrix} 37.4085778 \\ -122.1821831 \end{bmatrix}.$$

2.2 Avstand i planet

Den euklidiske avstanden i $\mathbb{R}^2$ er

$$d(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}.$$

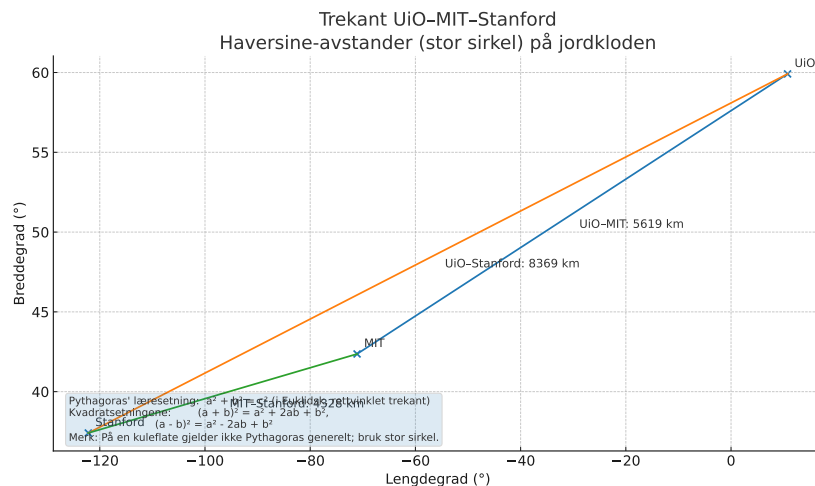
Denne metrikken er velegnet når koordinater allerede er i et Euklidsk kart (f.eks. etter passende projeksjon), men for jordkoordinater i grader er en sfærisk modell mer presis, se §2.3.

2.3 Haversine: stor sirkel-avstand på jordkula

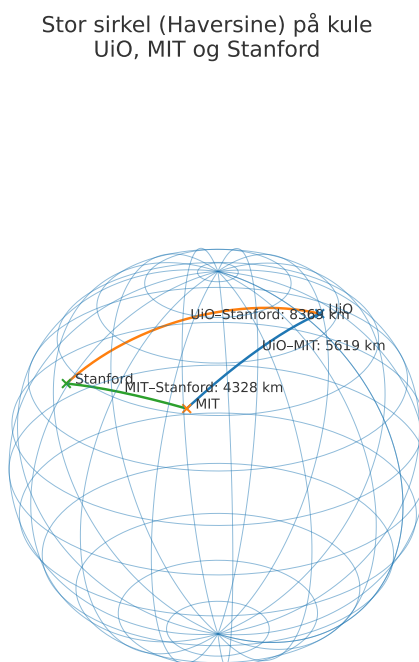
Når punkter på jordoverflaten beskrives med bredde- og lengdegrader, gir *haversine-formelen* stor sirkel-avstanden:

$$\begin{aligned} \varphi_1, \lambda_1 &= \text{breddegrad, lengdegrad (radianer) for punkt 1,} \\ \varphi_2, \lambda_2 &= \text{breddegrad, lengdegrad (radianer) for punkt 2,} \\ \Delta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1, \quad \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1, \\ a &= \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin^2\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right), \\ c &= 2 \arctan 2(\sqrt{a}, \sqrt{1-a}), \quad d = R \cdot c, \end{aligned}$$

der $R = 6371$ km er jordens middelradius.



Figur 1: Stor sirkel-avstandene (haversine) mellom Universitetet i Oslo, MIT og Stanford er vist. Pythagoras' læresetning og kvadratsætningene er inkludert for å markere forskjellen mellom plan geometri og sfærisk geometri. (Ole Kristian Aamot, Universitetet i Oslo, 25. august 2025)



Figur 2: Stor sirkel-avstandene (haversine) mellom Universitetet i Oslo, MIT og Stanford er vist. På en kuleflate gjelder ikke Pythagoras generelt men stor sirkel-avstand gir korrekt modell. (Ole Kristian Aamot, Universitetet i Oslo, 25. august 2025)

Numeriske eksempler. Med $R = 6371$ km og koordinatene over får vi

$$d(\text{UiO}, \text{MIT}) \approx \mathbf{5619} \text{ km}, \quad d(\text{UiO}, \text{Stanford}) \approx \mathbf{8369} \text{ km}.$$

Tallene er stor sirkel-avstander; reelle reiseruter kan avvike noe.

2.4 Matriser og transformasjoner

Samle punkter i en matrise

$$M = \begin{bmatrix} 59.9127 & 10.7461 \\ 42.362114 & -71.0889444 \\ 37.4085778 & -122.1821831 \end{bmatrix}.$$

Lineære transformasjoner $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ virker ved $M' = MA^\top$. En planrotasjon med vinkel θ er

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Skalering og translasjon (via homogeniserte koordinater) kan brukes for normalisering og kartprosjeksjoner.

2.5 Funksjoner av flere variable

La $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ modellere *nytte* av en lokasjon (x, y) , f.eks.

$$f(x, y) = \alpha U(x, y) - \beta d((x, y), (x_0, y_0)),$$

med U en (differensierbar) utdanningsverdi-funksjon og d en avstandsfunksjon. Gradient og stasjonære punkter:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{bmatrix}, \quad \nabla f = 0, \quad \det H_f \neq 0 \Rightarrow \text{lokal maksimum/minimum/salpunkt (via Hessian)}.$$

3 Anvendelser i MAT1120

- **Kalkulus:** kontinuitet, differensierbarhet og optimering i to variabler; analyse av gradientflyt for å finne lokale maksimum av f .
- **Lineær algebra:** vektorromsstruktur for lokasjoner, matriseoperasjoner for normalisering/rotasjon, SVD/PCA for dimensjonsreduksjon (om datasettet utvides).
- **Numerikk:** når lukkede former mangler (eller er upraktiske), brukes iterative metoder (Newton, gradientmetoder) for å løse optimerings- og ligningsproblemer.

4 Uløsbarehetsteoremet (Abels uløselighetsteorem)

I kontrast til mange problemer i kalkulus og lineær algebra som lar seg løse i lukkede former, finnes det fundamentale grenser for hva som *kan* uttrykkes med radikaler. Nedenfor formuleres et klassisk uløsbarehetsresultat, sentralt i algebra.

Teorem 1 (Abel–Ruffini/Abels uløselighetsteorem). *Det finnes ingen generell formel ved radikaler for røttene til en vilkårlig polynomligning av grad $n \geq 5$ med koeffisienter i et felt av karakteristikk 0 (f.eks. $\mathbb{Q}$). Mer presist: det eksisterer polynomer av grad 5 (og høyere) hvis røtter ikke kan uttrykkes ved en endelig kombinasjon av rasjonale operasjoner og radikaler av koeffisientene.*

Bevisidé (Galoisteori, skisse). For et separabelt polynom $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ med splitting field $K/\mathbb{Q}$ gir Galoisgruppen $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ symmetriene til røttene. Løsbarehet ved radikaler tilsvarer at G er en *løsbare* gruppe. For “generisk” polynom av grad $n \geq 5$ er $G \simeq S_n$, den symmetriske gruppen. Men S_n er ikke løsbare for $n \geq 5$ (den inneholder A_n som enkel ikke-abelsk normaldel). Dermed finnes ingen radikaluttrykk som løser alle femtegradsligninger. $\square$

Kommentar 2 (Relevans for MAT1120). Uløsbarehetsteoremet viser at ikke alle algebraiske problemer har lukkede former. I praksis betyr dette at:

- Mange ligningsproblemer (grad ≥ 5) må løses *numerisk* (f.eks. Newtons metode).
- I optimering (flere variable) finnes ofte ikke lukkede uttrykk for løsninger; vi benytter deriverte, Hessian og iterative metoder.
- I modellering av læringslokasjoner kan delproblemer redusere til ligninger uten lukket form; vi må planlegge for stabile numeriske algoritmer.

5 Diskusjon

Eksempelene over illustrerer hvordan vektorrom, matriser og kalkulus gir operative verktøy for å strukturere og analysere digitale læringsknutepunkt. Stor sirkel-avstand gjør geometri realistisk; flervariabel kalkulus støtter modeller av nytte og tilgjengelighet. Abels uløselighetsteorem minner om at selv enkle-å-formulere problemer kan mangle lukkede løsninger, og at numerikk er en integrert del av faget.

6 Konklusjon

Begrepene i MAT1120 er direkte anvendelige på digitale datasett: vektorrepresentasjoner, matriser og transformasjoner gir struktur; kalkulus i flere variable muliggjør optimering; haversine gir presise avstander på jordkula. Samtidig setter uløsbarehetsteoremet en prinsipiell grense for lukkede former og motiverer numeriske metoder. Dette danner en helhetlig tilnærming til analyse av digitale læringslokasjoner.

Bibliografi

- A. Hole, *Kalkulus og lineær algebra*, Universitetsforlaget, 2023.
- D. C. Lay, *Linear Algebra and Its Applications*, Pearson, 2016.
- G. Strang, *Linear Algebra and Learning from Data*, Wellesley-Cambridge Press, 2019.
- H. M. Edwards, *Galois Theory*, Springer, 1984.
- UiO, *MAT1120: Kalkulus og lineær algebra*, <https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT1120/>